Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

1982 **MATHEMATIQUES** (4 h)

1ère épreuve (option économique)

Nota : les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2 . On rappelle que E est de dimension 3 et que les trois polynômes 1 , X et X^2 en constituent une base que l'on notera B .

On considère l'application φ , de E dans E , définie par

φ : $P \longmapsto \varphi(P) = (X^2 - 1)\,P' - (2X + 1)\,P$,

P' désignant le polynôme dérivé de P .

1 - Démontrer que φ est une application linéaire de E dans E .

2 - Écrire la matrice A de φ relativement à la base B .

3 - Déterminer les valeurs propres de φ . En déduire que φ est un isomorphisme.

4 - Déterminer les sous-espaces propres de φ et montrer que φ est diagonalisable.

5 - Déterminer une base B' de E dans laquelle la matrice A' de φ est diagonale.
Écrire la matrice de passage M de la base B à la base B' et la relation entre les matrices A , A' , M et M^{-1} .

6 - a - Déduire de 5 - la relation
$A^k = MA'^k M^{-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

b - Application : déterminer φ^k (1) , $k \in \mathbb{N}^*$, sachant que $\varphi^k = \varphi^{k-1} \circ \varphi$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par
$f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$.

1 - a - Étudier la fonction f et donner sa courbe représentative.

b - Montrer que
si $|x| > 2$, $|f'(x)| < \frac{1}{4}$.

2 - Montrer qu'il existe un nombre L unique tel que $f(L) = L$ et que $2 < L < 2 + \frac{1}{4}$
(on pourra étudier la fonction $\varphi : x \longmapsto f(x) - x$).

3 - Soit un réel $x > 2$. En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction f sur [x , L] ou [L, x], montrer que
$|f(x) - L| < \frac{1}{4}|x - L|$.

4 - On considère la suite $n \longmapsto u_n$ définie par $u_0 \neq 0$ et la relation
$u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a - Montrer que
$\forall n \geq 1$, $u_n > 2$.

b - Montrer que
$\forall n \geq 1$, $|u_{n+1} - L| < \frac{1}{4}|u_n - L|$.

c - En déduire que, quel que soit $u_0 \neq 0$, la suite $n \longmapsto u_n$ converge vers L .

.../...

Exercice 3

Introduction : on s'intéresse à la transmission d'une information binaire, c'est-à-dire ne pouvant prendre que deux valeurs.

On admet que le procédé de transmission directe entre deux individus A et B est tel que, lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, ce dernier reçoit la valeur émise par A avec la probabilité p, et donc l'autre valeur avec la probabilité $q = 1 - p$.

Dans tout le problème, p est supposé connu et vérifie : $0 < p < 1$.

1 · On considère des individus successifs $i_0, i_1, \dots, i_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

L'information émise par i_0 est transmise à i_1, qui transmet la valeur reçue à i_2, et ainsi de suite jusqu'à i_n.

Entre deux individus i_k et i_{k+1}, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la transmission de l'information suit la loi décrite dans l'introduction.

On note p_k, $k \in \{1, \dots, n\}$, la probabilité pour que la valeur de l'information reçue par i_k soit identique à celle émise par i_0, et on pose $p_0 = 1$.

a - Trouver la relation liant p_{k+1} et p_k, $k \geqslant 0$ (attention : i_{k+1} peut recevoir la valeur émise par i_0 même lorsque i_k a reçu l'autre valeur...).

b - En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p.

c - Calculer $\lim_{n \to \infty} p_n$. Que conclure ?

2 · Dans cette question, l'individu i_0 émet l'information à destination directe (c'est-à-dire sans l'intermédiaire d'autres individus) d'une infinité d'individus $\{i_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, dont une partie se trouve «à l'écoute».

Le nombre X d'individus à l'écoute suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Entre i_0 et chacun des individus à l'écoute, la transmission de l'information suit la loi décrite dans l'introduction.

a - Lorsque n individus sont à l'écoute, quelle est la probabilité pour qu'ils soient k, $0 \leqslant k \leqslant n$, à recevoir la valeur de l'information émise par i_0, et donc $n - k$ à recevoir l'autre valeur ?

b - Exprimer en fonction de p et λ la probabilité pour qu'aucun individu ne reçoive la valeur de l'information émise par i_0 (c'est-à-dire qu'aucun individu n'est à l'écoute, ou que tous les individus à l'écoute reçoivent l'autre valeur d'information).

c - Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre d'individus recevant la valeur de l'information émise par i_0.

Montrer que la loi de probabilité de Y est une loi de Poisson de paramètre λp.

Calculer E (Y) et V (Y), espérance mathématique et variance de Y.

Exercice 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}\, dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{x}{1+x}\, dx .$$

1 · Calculer v_n et en donner un équivalent simple lorsque n tend vers l'infini.

2 · a - Montrer que, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$:

$0 \leqslant \sin x \leqslant x$ et $x \leqslant \operatorname{tg} x$.

b - En déduire que, pour $n \geqslant 3$,
$0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

3 · Étudier la convergence de la série de terme général v_n, puis de la série de terme général u_n.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail